Міністерство освіти і науки України

ВСП «Бердянський машинобудівний фаховий коледж

національного університету «Запорізька політехніка»

Циклова комісія гуманітарної, соціально-економічної та природничо-наукової підготовки

Затверджую

Заступник директора

з навчальної роботи

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

«\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 202\_ р.

**Вища математика**

Методичний посібник,

для самостійної роботи

|  |  |
| --- | --- |
| Галузь знань | 07 Управління та адміністрування |
| Спеціальність | 072 Фінанси, банківська справ та страхування |
| ОПП | Фінанси, банківська справ та страхування |

2023

Методичний посібник розроблено у відповідності з робочою навчальною програмою дисципліни «Вища математика».

Укладач–викладач вищої категорії,

викладач-методист Кожушко О.Я.



|  |  |
| --- | --- |
| **Передмова** ……………………………………………………………  **Перелік тем** …………………………………………………………..  **Розділ 1. Тригонометричні функції** ……………………………….  Тема 1.Тригонометричні функції……………………………..…...  **Розділ 2. Елементи лінійної алгебри** …………………………...…  Тема 2.1. Системи лінійних рівнянь з двома змінними та методи  їх обчислення …...…………………………………….  Тема 2.2. Розв’язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера ………………………………………………....  Тема 2.3. Прикладні задачі економічного змісту, які приводять до систем лінійних рівнянь ………………….……....…  **Розділ 3. Елементи векторної алгебри** …………………………....  Тема 3. Вектори. Векторні простори. Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів …...………………..……….  **Розділ 4. Аналітична геометрія** ………………………………….  Тема 4.1. Площина в просторі …………………………………...  Тема 4.2. Пряма лінія в просторі. Взаємне розміщення прямої та площини у просторі …………………………....……….  Тема 4.3. Застосування властивостей кривих другого порядку до розв’язування задач економічного змісту………..…  **Розділ 5. Системи лінійних нерівностей і лінійне програмування** ………………………………………...…  Тема 5. Системи лінійних нерівностей. Основні задачі лінійного програмування. Транспортна задача ………  **Розділ 6. Диференціальне числення функції однієї змінної** ……  Тема 6.1. Правила диференціювання. Похідні основних елементарних функцій ……………………………….…  Тема 6.2. Приклади застосування похідної до розв’язування задач економіки ………………………………………....  Тема 6.3. Диференціал складної функції. Застосування диференціалу до наближених обчислень ……………..  Тема 6.4. Розв’язування прикладних задач на максимум та мінімум …………………………………………………..  **Розділ 7. Диференціальне числення функції багатьох змінних**  Тема 7.1. Функції багатьох змінних. Частинні похідні. Екстремуми функції багатьох змінних ……………….  Тема 7.2. Повний диференціал. Частинні похідні вищих порядків. Умовний екстремум ………………………...  **Розділ 8. Інтегральне числення функції багатьох змінних** …...  Тема 8.1. Первісна функція. Невизначений інтеграл. Таблиця невизначених інтегралів ………..………………..…….  Тема 8.2. Інтегрування тригонометричних функцій …………......  Тема 8.3. Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій ...  Тема 8.4. Означення визначеного інтеграла. Інтегральні суми.....  Тема 8.5. Застосування визначеного інтегралу до обчислення площ, об’ємів, шляху ……………..…..…………………  **Розділ 9. Диференціальні рівняння** ……………………….………  Тема 9. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. ………………..…….………….  **Розділ 10. Елементи теорії ймовірності** ………………….………  Тема 10. Комбінаторика. Випадкові події. Ймовірність події. Випадкові величини…………………..………………..  **Література** …………………………………………………………… | 5  6  10  10  13  13  15  18  21  21  32  32  34  36  38  38  40  40  44  47  53  56  56  57  60  60  64  65  67  69  71  71  74  74  77 |

Самостійна робота студента – один з різновидів навчальної та пізнавальної діяльності. Самостійність – це розумова діяльність людини, її прагнення до знань, ініціативний і творчий підхід до виконання усіх навчальних і трудових завдань, здібність швидко орієнтуватись у новій обстановці, самому вирішувати питання, коли вони виникають, знаходити оригінальні засоби вирішення завдань і виконувати їх без сторонньої допомоги. Опрацьовуючи самостійно матеріал, Ви не лише засвоюєте знання, а й вчитеся працювати над літературою, вирізняти головне; розвиваєте творче сприйняття навчального матеріалу та вольові якості характеру.

Математика є однією з важливіших фундаментальних наук. Термін «математика» походить від грецького «матема» - знання.

На самостійне опрацювання винесено теми, які спираються на питання, пов’язані з курсом математики середньої школи. Багато тем вказують на практичне застосування теоретичних питань курсу вищої математики.

Самостійні опрацювання розроблено відповідно до типової програми з вищої математики.

Уся робота побудована за таким принципом: знайомитесь з метою вивчення теми та завданням; згідно пунктів плану опрацьовуєте вказану літературу, беручи до уваги методичні рекомендації, знаходите головне, що слід знати; розглядаєте та аналізуєте розв’язані приклади; засвоюєте матеріал; виконуєте практичне завдання з самостійного опрацювання; за допомогою питань для самоперевірки визначаєте рівень засвоєння Вами навчального матеріалу.

Матеріал викладено в доступній формі та поділено на розділи, кожен розділ складається з тем, на кожну тему виділено певну кількість годин. З переліком тем, винесених на самостійне опрацювання Ви теж можете ознайомитись. Матеріал оформлено так, щоб швидко можна було зорієнтуватися.

Всі завдання виконуються в звичайному зошиті в клітинку та здаються на перевірку не пізніше як через тиждень з моменту, коли їх було задано.

Бажаю наполегливості та успіху!

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| №  п/п | Назва теми | Кількість годин |
|  | **1. Тригонометричні функції** | **2** |
| 1. | Тригонометричні функції. | 2 |
|  | **2. Елементи лінійної алгебри** | **6** |
| 2. | Системи лінійних рівнянь з двома змінними та методи їх обчислення. | 2 |
| 3. | Розв’язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера. | 2 |
| 4. | Прикладні задачі економічного змісту, які приводять до систем лінійних рівнянь та їх розв’язання. | 2 |
|  | **3. Елементи векторної алгебри** | **4** |
| 5. | Вектори. Векторні простори. Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів. | 4 |
|  | **4. Аналітична геометрія.** | **6** |
| 6. | Площина в просторі. | 2 |
| 7. | Пряма лінія в просторі. | 2 |
| 8. | Взаємне розташування прямих і площин у просторі. | 2 |
| 9. | Застосування властивостей кривих другого порядку до розв’язування прикладних задач, зокрема задач економічного змісту. | 2 |
|  | **5. Диференціальне числення функції однієї змінної** | **8** |
| 10. | Правила диференціювання.  Похідні основних елементарних функцій | 2 |
| 11. | Приклади застосування похідної до розв’язування задач економіки. | 2 |
| 12. | Диференціал складної функції. Застосування диференціалу до наближених обчислень. | 2 |
| 13. | Розв’язування прикладних задач на максимум та мінімум. | 2 |
|  | **6. Диференціальне числення функції багатьох змінних** | **4** |
| 14. | Функції багатьох змінних. Частинні похідні. Екстремуми функції багатьох змінних. | 2 |
| 15. | Повний диференціал. Частинні похідні вищих порядків. Умовний екстремум. | 2 |
|  | **7. Інтегральне числення** | **8** |
| 16. | Первісна функція. Невизначений інтеграл. Таблиця невизначених інтегралів. | 2 |
| 17. | Інтегрування тригонометричних функцій. | 2 |
| 18. | Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій. | 2 |
| 19. | Означення визначеного інтеграла. Інтегральні суми. | 2 |
|  | **8. Диференціальні рівняння** | **2** |
| 20. | Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Загальний та частинний розв’язок. | 2 |
|  | **9. Елементи теорії ймовірності** | **2** |
| 21. | Комбінаторика. Випадкові події. Ймовірність події. Випадкові величини. | 2 |
|  | **Всього** | **42** |

Розділ 1

Тема 1:

Мета: повторення понять: тригонометричні функції кута, радіанне вимірювання кутів, тригонометричні функції числового аргументу; систематизація знань основних співвідношень між тригонометричними функціями одного аргументу, співвідношень між сторонами та кутами в прямокутному та довільному трикутниках; знайомство з оберненими тригонометричними функціями та їх властивостями.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати****:*   * означення тригонометричних функцій: синуса, косинуса, тангенса та котангенса через прямокутний трикутник, одиничне та довільне коло;  * основні тригонометричні формули; * властивості та графіки тригонометричних функцій, обернених тригонометричних функцій. | ***Вміти****:*   * користуватися формулами зведення; * обчислювати значення тригонометричних функцій за допомогою калькулятора і таблиць; * обчислювати відстані від доступної точки до недоступної, відстаней між недоступними точками, висоти предмета. |

***Завдання****:*



* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання.

*План*

1. Тригонометричні функції кута. Радіанне вимірювання кутів. Тригонометричні функції числового аргументу. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Формули зведення.

2. Співвідношення в прямокутному трикутнику між сторонами та кутами. Теорема косинусів та синусів.

3. Властивості та графіки тригонометричних функцій, обернених тригонометричних функції.

*Рекомендована література:*



[5] § 28-30 с. 240-250, § 34 с. 272-282.

[8] § 9 с. 74-77.

*Методичні рекомендації*

Під час вивчення даної теми зверніть увагу на співвідношення на с. 240 [5]. Саме ці співвідношення застосовують для знаходження відстаней між недоступними точками та визначення висоти предмета. Пригадайте, як перейти від радіанної до кутової міри вимірювання кутів. Розгляньте приклади 1,2,3 (с. 243-245), приклади з § 34 [5]. Зверніть увагу на приклади 1,2,3 (с. 74-75), приклади 5,6,7 (с. 76-77) [8].



***Завдання для самостійного опрацювання****:*

**Завдання 1.** Яких значень набуватиме , якщо .

**Завдання 2.** Знайти 1), 2), 3), 4), 5), 6) за допомогою таблиць та мікрокалькулятора.

**Завдання 3.** Знайти 1), 2), 3), 4) за допомогою таблиць та мікрокалькулятора.

**Завдання 4.** Для визначення ширини річки відмітили на березі два пункти А і В на відстані 70 м один від одного та виміряли кути  і , де С – дерево, що стоїть на протилежному березі річки біля води. Знайти ширину річки.



***Питання для самоперевірки:***

1. Які тригонометричні функції ви знаєте? Дайте означення.
2. Формула переходу від радіанної міри до градусної міри вимірювання кутів.
3. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу.
4. Властивості та графіки тригонометричних функцій.
5. Властивості та графіки обернених тригонометричних функцій.Розділ 2

Тема 2.1:

Мета: повторення понять: система рівнянь з двома змінними, розв’язок системи рівнянь з двома змінними; систематизація способів розв’язання систем лінійних рівнянь з двома змінними; знайомство зі способом розв’язання системи лінійних рівнянь за формулами Крамера.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати****:*   * поняття системи лінійних рівнянь з двома змінними; * що таке розв’язок системи лінійних рівнянь з двома змінними; * основні способи розв’язання систем лінійних рівнянь з двома змінними. | ***Вміти****:*   * обчислювати визначники другого порядку; * знаходити розв’язки систем лінійних рівнянь з двома змінними; * розв’язувати систему лінійних рівнянь з двома змінними за формулами Крамера. |

***Завдання****:*



* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання.

*План*

1. Поняття системи лінійних рівнянь з двома змінними.

2. Способи розв’язання системи лінійних рівнянь з двома змінними

1) графічний спосіб;

2) спосіб підстановки;

3) спосіб додавання;

4) формули Крамера.

*Рекомендована література:*

[2] т.2 с. 13-15.



[3] 1.1 с. 7-9.

[6] §1 с. 8-14.

*Методичні рекомендації*

Під час розгляду даної теми слід пригадати з курсу математики середньої школи поняття лінійного рівняння та системи лінійних рівнянь. Пригадати, що графіком лінійного рівняння є пряма лінія, а система лінійних рівнянь з двома змінними графічно зображається двома прямими на площині. Від їх взаємного розміщення залежить кількість розв’язків системи рівнянь.

Також з курсу середньої школи відомі основні способи розв’язання системи лінійних рівнянь з двома змінними: графічний, підстановки та додавання.

При вивченні способу розв’язання систем лінійних рівнянь з двома невідомими за допомогою формул Крамера слід знати, як одчислюються визначники другого порядку.



***Завдання для самостійного опрацювання****:*

За допомогою формул Крамера розв’язати системи рівнянь:

А)  ; Б) 



***Питання для самоперевірки:***

1. Поняття системи лінійних рівнянь з двома змінними.
2. Що таке розв’язок системи лінійних рівнянь з двома змінними?
3. Які основні способи розв’язання систем лінійних рівнянь з двома змінними ви знаєте?

Тема 2.2:

Мета: набуття знань та вмінь розв’язування систем лінійних рівнянь з трьома змінними за допомогою формул Крамера; узагальнення та систематизація способів розв’язання системи лінійних рівнянь з трьома змінними.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати****:*   * + поняття системи лінійних рівнянь з трьома змінними;  * + що таке розв’язок системи лінійних рівнянь з трьома змінними;   + основні способи розв’язання систем лінійних рівнянь з трьома змінними. | ***Вміти****:*   * + обчислювати визначники третього порядку;   + знаходити розв’язки систем лінійних рівнянь з трьома змінними;   + розв’язувати систему лінійних рівнянь з трьома змінними за формулами Крамера, матричним способом та методом Гауса. |

***Завдання****:*



* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання згідно номера варіанта.

*План*

1. Поняття системи лінійних рівнянь з трьома змінними.

2. Розв’язання системи лінійних рівнянь з трьома змінними за допомогою Формул Крамера.

*Рекомендована література:*

[2] т.3 с. 18-22.



[3] 1.2 с. 10-16.

[6] §4 с. 26-34.

*Методичні рекомендації*

При вивченні даних питань необхідно звернути увагу на визначники третього порядку та правила їх обчислення, на властивості визначників та їх застосування при розв'язуванні систем лінійних рівнянь. Розглянути, зокрема, спосіб розв’язання систем лінійних рівнянь з трьома змінними за допомогою формул Крамера. Спробувати зробити узагальнення.

Під час виконання практичного завдання слід пригадати означення матриці, оберненої матриці, дії над матрицями, метод Гауса та матричний спосіб розв’язання систем лінійних рівнянь з трьома змінними.



***Завдання для самостійного опрацювання:***

Розв’язати систему лінійних рівнянь з трьома змінними методом Гауса, за допомогою формул Крамера та матричним способом:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | 2. | 3. |
| 4. | 5. | 6. |
| 7. | 8. | 9. |
| 10. | 11. | 12. |
| 13. | 14. | 15. |
| 16. | 17. | 18. |
| 19. | 20. | 21. |
| 22. | 23. | 24. |
| 25. | 26. | 27. |
| 28. | 29. | 30. |



***Питання для самоперевірки:***

1. Поняття системи лінійних рівнянь з трьома змінними.
2. Що таке розв’язок системи лінійних рівнянь з трьома змінними?
3. Які основні способи розв’язання систем лінійних рівнянь з трьома змінними ви знаєте?
4. У чому суть способу розв’язання системи лінійних рівнянь з трьома змінними за допомогою формул Крамера?

Тема 2.3:

Мета: ознайомитись з практичним застосування систем лінійних рівнянь з трьома змінними до розв’язання деяких задач економіки.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати****:*   * + які задачі економічного змісту приводять до поняття системи лінійних рівнянь з трьома змінними;   + суть моделі Леонтьєва багатогалузевої економіки. | ***Вміти****:*   * + розв’язувати задачі економічного змісту, що приводять до поняття системи лінійних рівнянь з трьома змінними;   + знаходити розв’язки систем лінійних рівнянь з трьома змінними;   + розв’язувати систему лінійних рівнянь з трьома змінними найзручнішим способом. |

***Завдання****:*



* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання.

*План*

1. Задачі про три типи виробів, на які затрачують три види сировини.
2. Задачі багатогалузевого господарства. Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки (балансовий аналіз).

*Рекомендована література:*

[2] т.3 с. 22-23, т. 4 с. 29-37.



*Методичні рекомендації*

При вивченні даних питань необхідно звернути увагу на приклади, що розглянуто у вказаній літературі. Проаналізуйте хід переходу від економічного змісту задач до їх математичного запису. Ознайомлюючись із моделлю Леонтьєва, з’ясуйте що саме вона дає можливість знаходити в макроекономіці, як складаються рівняння, що визначають співвідношення балансу, як знаходяться коефіцієнти прямих витрат, який вигляд має рівняння лінійного міжгалузевого балансу, що називають матрицею повних витрат, продуктивною матрицею.



***Завдання для самостійного опрацювання:***

**Задача.** Підприємство випускає три види продукції, використовуючи сировину трьох видів. Необхідні характеристики виробництва задано таблицею

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Вид сировини | Витрати сировини на одиницю продукції | | | Запаси сировини |
| П1 | П2 | П3 |
| S1 | 5 | 3 | 4 | 2700 |
| S2 | 2 | 1 | 1 | 900 |
| S3 | 3 | 2 | 2 | 1600 |

Знайти обсяг випуску кожного виду продукції при повному використанні наявних запасів сировини.



***Питання для самоперевірки:***

1. Які задачі економічного змісту можна розв’язувати за допомогою системи лінійних рівнянь?
2. В чому суть балансового аналізу?
3. Який вигляд має рівняння лінійного міжгалузевого балансу, або модель Леонтьєва.

Розділ 3

Тема 3:

Мета : узагальнити та поглибити знання щодо поняття вектора, значення векторів та дій над ними; розширити уявлення про простір.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати****:*   * + поняття вектор, модуль вектора, колінеарні, компланарні, рівні вектори.  * + означення декартової системи координат, векторного простору, векторного базису на площині та в просторі ;   + додавання, віднімання векторів за правилом трикутника і паралелограма;   + дії над векторами, заданими своїми координатами;   + умова колінеарності та перпендикулярності векторів;   + формули знаходження довжини вектора, ділення відрізка в даному відношенні;   + скалярний, векторний, мішаний добуток векторів. | ***Вміти****:*   * + виконувати дії над векторами у векторній та координатній формі;   + будувати точки у просторовій системі координат;   + знаходити скалярний, векторний та мішаний добуток векторів;   + знаходити відстань між точками та ділити відрізок у певному відношенні;   + розкладати вектор за базисом, знаходити координати вектора в базисі. |

***Завдання****:*



* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання згідно номера варіанта.

*План*

1. Поняття вектора. Дії над векторами. Координати вектора. Дії над векторами, заданими своїми координатами. Поділ відрізка у даному відношенні.

2. Декартова система координат. Проекція вектора на вісь. Побудова точок в прямокутній просторовій системі координат.

2. Векторні простори. Базис на площині і в просторі. Розкладання вектора за базисом.

3. Скалярний добуток векторів. Кут між векторами. Напрямні косинуса. Умова колінеарності і компланарності векторів.

4. Векторний і мішаний добуток векторів.

*Рекомендована література:*

[1] §1-4 с. 9-13.



[2] т.5 с. 45-47.

[3] 1.10 с. 28-31.

[4] §4-11 с. 52-76.

*Методичні рекомендації*

Під час опрацювання даної теми зверніть увагу на те, як зображається прямокутна просторова система координат на площині, як будуються точки в цій системі координат. Ці питання досить детально освітленні на с. 64-65 [4].

Запам'ятайте формулу розкладу вектора у векторному базисі на площині і в просторі, формулу знаходження довжини вектора, ділення відрізка у певному відношенні, скалярного добутку векторів.

Необхідно вміти будувати вектор в прямокутній системі координат та знаходити його координати.

Зверніть увагу на умову колініарності і перпендикулярності векторів.

Також ознайомтесь з поняттями векторного і мішаного добутку векторів та їх застосуванням.

Для швидкого та правильного розв’язання завдань з самостійного опрацювання уважно розгляньте приклади на с. 60,62, 69,72,73 [4], с. 12,14 [1], с.47 [2] та проаналізуйте їх розв’язання.



***Завдання для самостійного опрацювання****:*

|  |  |
| --- | --- |
| ***Варіант 1.***   1. Дано Знайти модуль вектора . 2. В просторовій прямокутній системі координат побудувати вектор , якщо , . 3. Записати розклад за базисом  векторів  ; . 4. Дано точки  та . Знайти точку , яка ділить відрізок *АВ* у відношенні  . | ***Варіант 2.***   * + - 1. Дано Знайти модуль вектора .       2. В просторовій прямокутній системі координат побудувати вектор , якщо , .       3. Записати розклад за базисом  векторів  ; .       4. Дано точки  та . Знайти точку , яка ділить відрізок *АВ* у відношенні  . |
| ***Варіант 3.***   1. Дано   Знайти модуль вектора .   1. В просторовій прямокутній системі координат побудувати точки , . 2. Записати розклад за базисом  векторів  ; . 3. Доведіть, що трикутник з вершинами , ,  рівнобедрений. | ***Варіант 4.***   1. Дано   Знайти модуль вектора .   1. В просторовій прямокутній системі координат побудувати точки , . 2. Записати розклад за базисом  векторів  ; . 3. Точки  та  відповідно початок і середина відрізка *АВ*. Знайти координати кінця *В* цього відрізка. |
| ***Варіант 5.***   1. Дано   Знайти .   1. В просторовій прямокутній системі координат побудувати точки , . 2. Записати розклад за базисом  векторів ; ; . 3. Доведіть, що трикутник з вершинами , ,  прямокутний. | ***Варіант 6.***   1. Дано   Знайти .   1. В просторовій прямокутній системі координат побудувати точки , . 2. Записати розклад за базисом  векторів ; ; . 3. Доведіть, що трикутник з вершинами , ,  рівнобедрений. |
| ***Варіант 7.***   1. Дано   Знайти .   1. В просторовій прямокутній системі координат побудувати точки , . 2. Записати розклад за базисом  векторів ; ; . 3. Доведіть, що трикутник з вершинами , ,  рівнобедрений. | ***Варіант 8.***   1. Дано   Знайти .   1. В просторовій прямокутній системі координат побудувати точки , . 2. Записати розклад за базисом  векторів ; ; . 3. Доведіть, що трикутник з вершинами , ,  рівнобедрений. |
| ***Варіант 9.***   1. Дано ; . Знайти  та . 2. Дано два довільних вектори  та . Побудувати . 3. Записати розклад за базисом  векторів  ; . 4. Точки  та  відповідно початок і середина відрізка *АВ*. Знайти координати кінця *В* цього відрізка. | ***Варіант 10.***   1. Дано ; . Знайти  та . 2. Дано два довільних вектори  та . Побудувати . 3. Записати розклад за базисом  векторів  ; . 4. Точки  та  відповідно початок і середина відрізка *АВ*. Знайти координати кінця *В* цього відрізка. |
| ***Варіант 11.***   1. Дано ; . Знайти  та . 2. Дано два довільних вектори  та . Побудувати . 3. Знайти в базисі  координати векторів ; ; . 4. Доведіть, що трикутник з вершинами , ,  прямокутний. | ***Варіант 12.***   1. Дано ; . Знайти . 2. Дано два довільних вектори  та . Побудувати . 3. Знайти в базисі  координати векторів ; ; . 4. Доведіть, що трикутник з вершинами , ,  прямокутний. |
| ***Варіант 13.***   1. Дано ; . Знайти . 2. Дано два довільних вектори  та . Побудувати . 3. Знайти в базисі  координати векторів ; ; . 4. Доведіть, що трикутник з вершинами , ,  прямокутний. | ***Варіант 14.***   1. Дано ; . Знайти . 2. Дано два довільних вектори  та . Побудувати . 3. Знайти в базисі  координати векторів ; ; . 4. Дано точки  та . Знайти точку , яка ділить відрізок *АВ* у відношенні  . |
| ***Варіант 15.***   1. Дано ; . Знайти . 2. Дано два довільних вектори  та . Побудувати . 3. Знайти в базисі  координати векторів ; ; . 4. Відрізок, що з’єднує точки  та , розділений на три рівні частини. Знайти координати точок ділення. | ***Варіант 16.***   1. Дано  Знайти . 2. В просторовій прямокутній системі координат побудувати точки , . 3. Знайти в базисі  координати векторів ; ; . 4. Відрізок, що з’єднує точки  та , розділений навпіл. Знайти координати середини відрізка. |
| ***Варіант 17.***   1. Дано  Знайти . 2. В просторовій прямокутній системі координат побудувати вектор , якщо , . 3. Знайти в базисі  координати векторів ; ; . 4. Доведіть, що трикутник з вершинами , ,  рівнобедрений. | ***Варіант 18.***   1. Дано  Знайти . 2. В просторовій прямокутній системі координат побудувати вектор , якщо , . 3. Знайти в базисі  координати векторів ; ; . 4. Дано точки  та . Знайти точку , яка ділить відрізок *АВ* у відношенні  . |
| ***Варіант 19.***   1. Дано  Знайти . 2. В просторовій прямокутній системі координат побудувати вектор , якщо , . 3. Знайти в базисі  координати векторів ; ; . 4. Доведіть, що трикутник з вершинами , ,  рівнобедрений. | ***Варіант 20.***   1. Дано  Знайти . 2. В просторовій прямокутній системі координат побудувати вектор , якщо , . 3. Знайти в базисі  координати векторів ; ; . 4. Дано точки  та . Знайти точку , яка ділить відрізок *АВ* у відношенні  . |
| ***Варіант 21.***   1. Дано   Знайти модуль вектора .   1. В просторовій прямокутній системі координат побудувати вектор , якщо , . 2. Записати розклад за базисом  векторів  ; . 3. Дано точки  та . Знайти точку , яка ділить відрізок *АВ* у відношенні  . | ***Варіант 22.***   1. Дано ; .Знайти  та . 2. Дано два довільних вектори  та . Побудувати . 3. Записати розклад за базисом  векторів  ; . 4. Точки  та  відповідно початок і середина відрізка *АВ*. Знайти координати кінця *В* цього відрізка. |
| ***Варіант 23.***   1. Дано  Знайти модуль вектора . 2. В просторовій прямокутній системі координат побудувати точки , . 3. Записати розклад за базисом  векторів  ; . 4. Точки  та  відповідно початок і середина відрізка *АВ*. Знайти координати кінця *В* цього відрізка. | ***Варіант 24.***   1. Дано  Знайти модуль вектора . 2. В просторовій прямокутній системі координат побудувати точки , . 3. Записати розклад за базисом  векторів  ; . 4. Точки  та  відповідно початок і середина відрізка *АВ*. Знайти координати кінця *В* цього відрізка. |
| ***Варіант 25.***   1. Дано   Знайти .   1. В просторовій прямокутній системі координат побудувати точки , . 2. Записати розклад за базисом  векторів ; ; . 3. Доведіть, що трикутник з вершинами , ,  рівнобедрений. | ***Варіант 26.***   1. Дано   Знайти .   1. В просторовій прямокутній системі координат побудувати точки, . 2. Записати розклад за базисом  векторів ; ; . 3. Доведіть, що трикутник з вершинами , ,  рівнобедрений. |
| ***Варіант 27.***   1. Дано ; . Знайти  та . 2. В просторовій прямокутній системі координат побудувати точки , . 3. Записати розклад за базисом  векторів  ; . 4. Точки  та  відповідно початок і середина відрізка *АВ*. Знайти координати кінця *В* цього відрізка. | ***Варіант 28.***   1. Дано ; . Знайти  та . 2. В просторовій прямокутній системі координат побудувати точки , . 3. Записати розклад за базисом  векторів ; . 4. Точки  та  відповідно початок і середина відрізка *АВ*. Знайти координати кінця *В* цього відрізка. |
| ***Варіант 29.***   1. Дано ; . Знайти . 2. Дано два довільних вектори  та . Побудувати . 3. Знайти в базисі  координати векторів ; ; . 4. Відрізок, що з’єднує точки  та , розділений на три рівні частини. Знайти координати точок ділення. | ***Варіант 30.***   1. Дано  Знайти . 2. В просторовій прямокутній системі координат побудувати точки , . 3. Знайти в базисі  координати векторів ; ; . 4. Відрізок, що з’єднує точки  та , розділений навпіл. Знайти координати середини відрізка. |



***Питання для самоперевірки:***

1. Дати означення вектора.

1. Що називається координатами вектора ?
2. Як зображається просторова прямокутна система координат на площині?
3. Дії над векторами, що задані своїми координатами.
4. Дати означення векторного базису.
5. Як знайти координати вектора в базисі та розкласти вектор за базисом?
6. Скалярний добуток двох векторів. Записати формулу.
7. Записати формулу знаходження кута між векторами.
8. Яка умова перпендикулярності та колініарності векторів?
9. Дати означення векторного та мішаного добутку векторів.

Розділ 4

Тема 4.1:

Мета: поглибити та розширити знання про площину; розглянути різні рівняння площини та розміщення площин у просторі.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати:***   * що таке нормальний вектор площини;  * рівняння площини, заданої точкою і нормальним вектором; * рівняння площини, заданої трьома точками; * загальне рівняння площини; * рівняння площини у відрізках. | ***Вміти:***   * знаходити рівняння площини; * знаходити кут між площинами у просторі; * знаходити відстань від точки до площини; * досліджувати взаємне розміщення площин у просторі, знаючи їх загальні рівняння; * досліджувати розміщення площини відносно системи координат. |

***Завдання****:*



* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання.

*План*

1. Загальне рівняння площини в просторі та його дослідження.
2. Рівняння площини, що проходить через три точки. Рівняння площини у відрізках на осях.
3. Кут між двома площинами у просторі. Відстань від точки до площини.
4. Умова паралельності і перпендикулярності площин.

*Рекомендована література:*



[2] т.6 с. 51-53.

*Методичні рекомендації*

Особливу увагу при опрацюванні матеріалу зверніть на загальне рівняння площини у просторі. Дослідіть розміщення площині в залежності від виду загального рівняння. Також запам’ятайте формулу, що виражає рівняння площини за трьома точками (пригадайте, як обчислюються визначники третього порядку) та рівняння площини у відрізках. Проаналізуйте перехід від одного виду рівняння площини до іншого. Розгляньте приклади на с. 52-53 [2]. Зверніть увагу на те, як знаходити відстань від точки до площини, кут між площинами, у чому полягає умова перпендикулярності і паралельності площин у просторі.



***Завдання для самостійного опрацювання:***

А) Знайти канонічні та параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку М0(К;К-11;-3) паралельно вектору , де К – порядковий номер студента за списком.

Б) Знайти відстань між паралельними прямими , 



***Питання для самоперевірки:***

1. Загальне рівняння площини у просторі.
2. Рівняння площини у відрізках.
3. Рівняння площини за трьома точками.
4. Рівняння площини за точкою і нормальним вектором.
5. Як знайти кут між площинами?
6. Як знайти відстань від точки до площини?

Тема 4.2:

Мета: поглибити та розширити знання про пряму; розглянути різні рівняння прямої у просторі та взаємне розміщення прямої та площини у просторі.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати:***   * що таке нормальний вектор до прямої;  * що таке направляючий вектор до прямої; * рівняння прямої, заданої точкою і нормальним вектором; * рівняння прямої, заданої точкою і направляючим вектором; * параметричне рівняння прямої; * рівняння прямої, яка проходить через дві точки; * умову паралельності і перпендикулярності прямих у просторі; * умову паралельності і перпендикулярності прямої і площини у просторі; * необхідну і достатню умову належності прямих одній площині. | ***Вміти:***   * складати рівняння прямої у просторі; * знаходити кут між прямими та прямою і площиною у просторі; * знаходити відстань від точки до прямої у просторі; * досліджувати взаємне розміщення прямих та прямої і площини у просторі; * знаходити кут між двома прямими та прямою і площиною у просторі. |



***Завдання****:*

* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання згідно номера варіанта.

*План*

1. Різні види рівнянь прямої в просторі.
2. Кут між двома прямими в просторі. Кут між прямою і площиною.
3. Умова паралельності і перпендикулярності прямої і площини.
4. Умови паралельності і перпендикулярності прямих у просторі.

*Рекомендована література:*



[2] т.7 с. 56-58.

*Методичні рекомендації*

При опрацюванні матеріалу зверніть увагу на різні рівняння прямої у просторі. Дослідіть належність прямих одній площин, взаємне розміщення прямих і площин у просторі. Проаналізуйте перехід від одного виду рівняння площини до іншого, умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини та двох прямих у просторі. Розгляньте приклади на с. 58-59 [2]. Запам’ятайте формулу знаходження кута між прямими та між прямою і площинною у просторі.



***Завдання для самостійного опрацювання****:*

1. Написати рівняння площини, яка проходить через точку М0 (*к;к-10;2к-23*) паралельно площині , де К-номер за списком студента.

2. Обчислити відстань  від точки  до площини, яка проходить через точки , , , де К-номер за списком студента.



***Питання для самоперевірки:***

1. Що таке направляючий вектор до прямої?
2. Що таке нормальний вектор до прямої?
3. Які рівняння прямих в просторі ви знаєте?
4. В чому полягає умова паралельності і перпендикулярності прямих у просторі?
5. В чому полягає умова паралельності і перпендикулярності прямої і площини у просторі?
6. Суть необхідної і достатньої умови належності прямих одній площині.
7. Як знайти кут між прямою і площиною у просторі?
8. Як знайти кут між прямими у просторі?

Тема 4.3:

Мета: дослідити практичне застосування властивостей кривих другого порядку до розв’язання деяких задач економіки.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати****:*   * + які задачі економічного змісту приводять до поняття кривих другого порядку. | ***Вміти****:*   * + співставляти економічній умові задачі геометричні властивості кривих;   + розв’язувати задачі економічного змісту, що приводять до кривих другого порядку. |



***Завдання****:*

* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання.

*План*

1. Задачі економічного змісту, що приводять до властивостей кривих другого порядку.

*Рекомендована література:*



[2] т.9 с. 67-71.

*Методичні рекомендації*

Знання щодо уявлення про криві другого порядку та їх властивості використовуються при розв’язуванні задач, в умові яких йдеться про найзручніше та найприбутковіше розташування тих чи інших об’єктів підприємництва. Для розв’язання таких задач слід проаналізувати всі можливі розташування об’єктів, що відповідають вимогам умови та визначити найекономніше (найвигідніше).



***Завдання для самостійного опрацювання****:*

**Задача.** Відстань між двома підприємствами, що виробляють однакову продукцію, дорівнює 300 км. Транспортні витрати на перевезення продукції від підприємництва П1 вдвічі більше, ніж від П2. Знайти сукупність точок – межу розміщення споживачів, яким однаково вигідно одержувати продукцію від підприємств П1 та П2.



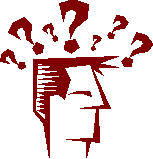
***Питання для самоперевірки:***

1. Які криві другого порядку ви знаєте?
2. Пригадайте властивості еліпса, кола, параболи та гіперболи.
3. Яка залежність між фокусною відстанню та півосями еліпса (гіперболи)?
4. Які найтиповіші задачі економічного змісту приводять до поняття кривих другого порядку?

Розділ 5

Тема 5:

Мета: ознайомлення з поняттям системи лінійних нерівностей, із способами її розв’язання та застосуванням.



|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати****:*   * + вигляд системи лінійний нерівностей;   + поняття задачі лінійного програмування;   + суть транспортної задачі. | ***Вміти****:*   * + розв’язувати задачі лінійного програмування. |

***Завдання****:*



* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання.

*План*

1. Система лінійних нерівностей.
2. Основні задачі і поняття лінійного програмування. Транспортна задача.

*Рекомендована література:*

«Алгебра и начала анализа» ч.І / под ред. Г.М. Яковлєва. – М: «Наука», 1981. (с. 118-124)



*Методичні рекомендації*

Під час вивчення теми зверніть увагу на розв’язання систем лінійних рівнянь, зокрема графічний спосіб, та їх практичне застосування. Розгляньте приклади 3,4 с. 119-120 та опис розв’язання транспортної задачі.



***Завдання для самостійного опрацювання****:*

**Задача.** Два хлібозаводи випікають хліб для трьох населених пунктів, хлібозавод №1 випікає щодня 40 т хліба, хлібозавод №2 – 20 т. Населений пункт щодня споживає 30 т хліба, населений пункт № 2 – 20т, населений пункт № 3 – 10т. Вартість доставки однієї тонни хліба в рублях з кожного хлібозаводу в кожен населений пункт задано таблицею

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Населений пункт  Хлібозавод | № 1 | № 2 | № 3 |
| № 1  № 2 | 3  3 | 4  5 | 5  2 |

Слід скласти найбільш економний план доставки хліба.

Розділ 6

Тема 6.1:

Мета: повторення і систематизація знань і вмінь знаходити похідні функцій.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати****:*   * + правила диференціювання функції однієї змінної;   + похідні основних елементарних функцій. | ***Вміти****:*   * + користуватися таблицею похідних основних елементарних функцій;   + знаходити похідну функції однієї змінної;   + застосовувати правила диференціювання до знаходження похідної функції однієї змінної. |

***Завдання****:*



* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання згідно номера варіанта.

*План*

1. Правила диференціювання.
2. Похідні основних елементарних функцій.

*Рекомендована література:*

[1 § 67-82 с. 145-171.



[2] т. 14 с. 96-98.

[3] п. 3.2. с. 47-51.

[4] § 33-36 с. 205-217.

*Методичні рекомендації*

При самостійному опрацюванні матеріалу необхідно звернути увагу на правила знаходження похідної суми, різниці, добутку, частки, похідної від добутку сталої на функцію, а також особливо на знаходження похідної від складної функції.

Слід запам’ятати похідні від основних елементарних функцій.

Також пригадайте зі шкільного курсу математики як представити корінь n-го степеня у вигляді степеня та як зміниться показник степеня при перенесенні степеня зі знаменника в чисельник.



***Завдання для самостійного опрацювання****:*

Обчислити похідні функцій*:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***Варіант 1.*** | ***Варіант 2.*** | ***Варіант 3.*** |
| ***Варіант 4.*** | ***Варіант 5*** | ***Варіант 6*** |
| ***Варіант 7*** | ***Варіант 8*** | ***Варіант 9*** |
| ***Варіант 10*** | ***Варіант 11*** | ***Варіант 12*** |
| ***Варіант 13*** | ***Варіант 14*** | ***Варіант 15*** |
| ***Варіант 16*** | ***Варіант 17*** | ***Варіант 18*** |
| ***Варіант 19*** | ***Варіант 20*** | ***Варіант 21*** |
| ***Варіант 22*** | ***Варіант 23*** | ***Варіант 24*** |
| ***Варіант 25*** | ***Варіант 26*** | ***Варіант 27*** |
| ***Варіант 28*** | ***Варіант 29*** | ***Варіант 30*** |

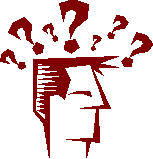


***Питання для самоперевірки:***

1. Які правила диференціювання існують?
2. Що називають похідною функції?
3. Як позначається похідна?

Тема 6.2:

Мета: ознайомлення з застосуванням похідної до розв’язування задач з економіки, геометрії, фізики, механіки, електротехніки та інших дисциплін.



|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати****:*   * + означення похідної;   + правила диференціювання;   + практичне застосування похідної. | ***Вміти****:*   * + знаходити похідні;   + розв’язувати задачі з економіки, фізики, геометрії із застосуванням похідної. |

***Завдання****:*



* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання.

*План*

1. Застосування похідної в економіці.
2. Застосування похідної в фізиці.
3. Застосування похідної в геометрії.
4. Застосування похідної при розв’язуванні задач інших дисциплін.

*Рекомендована література:*

[1] § 61-62 с. 135-139, § 66 с. 142-145.



[2] т.16 с. 106-109.

[5] § 19-20 с. 190-201.

*Методичні рекомендації*

При самостійному опрацюванні теми необхідно ознайомитися із застосуванням похідної. Основну увагу звернути на приклади з економіки, на поняття функціональної залежності, а також пригадати геометричний і фізичний зміст похідної та пов’язати з ними практичне застосування похідної в геометрії (знаходження дотичної та нормалі) та механіці (знаходження швидкості руху).

Розгляньте та проаналізуйте розв’язання прикладів на с. 107-109 [2] .



***Завдання для самостійного опрацювання****:*

Розв’язати задачі:

**Задача1.** Обсяг продукції *и* (ум.од.) цеху протягом дня є функцією , де *t* – час (год.). Знайти продуктивність праці через 2 години після початку роботи.

**Задача 2.** Залежність між собівартістю одиниці продукції *у* (тис. грн.) і випуском продукції *х* (млрд. грн.) виражається функцією . Знайти еластичність собівартості при випуску продукції, рівному 60 млрд. грн.

**Задача 3.** Написати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції  в точці .

**Задача 4.** Закон руху точки  (шлях виражається в метрах, час – в секундах). Знайти швидкість руху точки при  .



***Питання для самоперевірки:***

1. Застосування похідної в економіці.
2. Застосування похідної в фізиці.
3. Застосування похідної в геометрії.

Тема 6.3:

Мета: формування поняття диференціала складної функції, ознайомлення із застосуванням диференціала до наближених обчислень.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати****:*   * + означення диференціала функції;   + формулу знаходження приросту функції;   + правило диференціювання складної функції. | ***Вміти****:*   * + знаходити диференціал складної функції;   + виконувати наближені обчислення. |

***Завдання****:*



* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання згідно номера варіанта.

*План*

1. Диференціал складної функції.
2. Застосування диференціала до наближених обчислень
   1. Знаходження приросту функції.
   2. Знаходження числового значення функції.
   3. Обчислення за наближеними формулами значень , , .

*Рекомендована література:*



[1] § 100 с. 206-210.

[2] т.16 с. 106-109.

[3] 3.3 с. 51-55.

*Методичні рекомендації*

При опрацюванні теми необхідно добре володіти знанням знаходження похідної складної функції та знати означення диференціала. Всі наближені формули запам’ятовувати не обов’язково, достатньо знати, що в основі кожної з них лежить умова , де  - значення функції в точці ,  - значення функції в точці ,  - диференціал функції.



***Завдання для самостійного опрацювання****:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***Варіант 1.***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , | ***Варіант 2.***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , | ***Варіант 3.***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , |
| ***Варіант 4.***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , | ***Варіант 5***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , | ***Варіант 6***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , |
| ***Варіант 7***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , | ***Варіант 8***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , | ***Варіант 9***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , |
| ***Варіант 10***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , | ***Варіант 11***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , | ***Варіант 12***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , |
| ***Варіант 13***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , | ***Варіант 14***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , | ***Варіант 15***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , |
| ***Варіант 16***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , | ***Варіант 17***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення приросту функції      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , | ***Варіант 18***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , |
| ***Варіант 19***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , | ***Варіант 20***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , | ***Варіант 21***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , |
| ***Варіант 22***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення приросту функції      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , | ***Варіант 23***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , | ***Варіант 24***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , |
| ***Варіант 25***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , | ***Варіант 26***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , | ***Варіант 27***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , |
| ***Варіант 28***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , | ***Варіант 29***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , | ***Варіант 30***   1. Знайти диференціал функції      1. Знайти наближене значення      1. Знайти наближене значення приросту функції     при , |



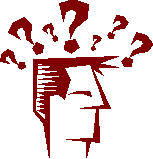
***Питання для самоперевірки:***

1. Означення диференціалу функції.
2. Як за допомогою диференціалу знайти приріст функції.
3. Формула знаходження диференціалу складної функції.

4. Застосування диференціалу до наближених обчислень.

Тема 6.4:

Мета: ознайомитися з практичним застосуванням знаходження максимуму та мінімуму функції.



|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати****:*   * + поняття екстремуму функції (максимуму та мінімуму);   + ознаки максимуму та мінімуму функції;   + правила відшукання максимуму та мінімуму функції. | ***Вміти****:*   * + знаходити екстремум функції;   + розв’язувати прикладні задачі на максимум та мінімум. |

***Завдання****:*



* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання.

*План*

1. Математичні задачі на максимум та мінімум.
2. Фізичні задачі на максимум та мінімум.
3. Задачі економічного змісту на максимум та мінімум.

*Рекомендована література:*

[1] § 88-90, 94,95 с. 182-195.



[2] т.17 с. 115-125.

[3] 3.4, 3.6 с. 55-68.

*Методичні рекомендації*

При опрацюванні матеріалу по даній темі зверніть увагу на розв’язані задачі в § 95 [2]. Проаналізуйте їх хід розв’язання.

Розгляньте задачі 3, 5 (с. 117-118) [2].

Обов’язково повторіть спочатку правила знаходження екстремумів функції, та умову зростання і спадання функції.



***Завдання для самостійного опрацювання****:*

***Задача 1.*** Розбити число 5 на два доданки так, щоб сума кубів цих доданків була найменшою.

***Задача 2.*** Матеріальна точка здійснює прямолінійний рух за законом , де *s* – шлях у метрах, *t* – час у секундах. В який момент часу *t* швидкість точки буде найбільшою і яка величина цієї найбільшої швидкості?

***Задача 3.*** Загальна вартість вироблених *х* одиниць продукції . Знайти скільки одиниць продукції *х* слід випустити, щоб середня вартість одиниці продукції  була мінімальною.



***Питання для самоперевірки:***

1. Перше правило знаходження максимуму та мінімуму функції.
2. Друге правило знаходження максимуму та мінімуму функції.
3. Умова зростання і спадання функції.

Розділ 7

Тема 7.1:

Мета: ознайомлення з поняттям функції багатьох змінних; формування вмінь знаходження частинних похідних функції багатьох змінних та досліджувати на екстремум.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати****:*   * + означення функції багатьох змінних;   + диференціювання функції багатьох змінних;   + поняття частинних похідних;   + необхідну умову існування точок екстремуму. | ***Вміти****:*   * + знаходити частинні похідні;   + досліджувати функції багатьох змінних на екстремум. |

***Завдання****:*



* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання.

*План*

1. Функція багатьох змінних: означення, неперервність, границя функції.
2. Частинні похідні першого порядку.
3. Необхідна умова існування точок екстремуму.

*Рекомендована література:*



[2] т.23 с. 151-155, т. 24 с. 159-163.

*Методичні рекомендації*

Під час опрацювання теми особливу увагу приділіть функції двох змінних: означення, неперервність, частинні похідні першого порядку, дослідження на екстремуми. Розгляньте приклади, що наводяться в рекомендованій літературі, та проаналізуйте їх. Зокрема, приклади 1, 2, 5, 6 (с.151-153) та приклад 1 (с. 160).



***Завдання для самостійного опрацювання****:*

1. Знайти область визначення функції:



2. Знайти частинні похідні першого порядку функції двох змінних:



3. Знайти екстремуми функції двох змінних:





***Питання для самоперевірки:***

1. Означення функції багатьох змінних.
2. Означення границі функції багатьох змінних.
3. Означення неперервності функції багатьох змінних.
4. Як знаходять частинні похідні функції багатьох змінних.
5. Необхідна умова існування точок екстремуму функції багатьох змінних.

Тема 7.2:

Мета: ознайомлення з поняттями повний диференціал, частинні похідні вищих порядків функції багатьох змінних, градієнт, умовний екстремум та методом множників Лагранжа; формування вмінь знаходження частинних похідних вищих порядків функції багатьох змінних та умовного екстремуму.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати****:*   * + поняття частинних похідних вищих порядків;   + поняття повного диференціалу;   + означення похідної за напрямом та градієнта.   + суть методу множників Лагранжа. | ***Вміти****:*   * + знаходити частинні похідні;   + знаходити умовний екстремум. |



***Завдання****:*

* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання.

*План*

1. Повний диференціал.
2. Частинні похідні вищих порядків.
3. Похідна за напрямом. Градієнт.
4. Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа.

*Рекомендована література:*



[2] т.23 с. 151-155, т. 24 с. 159-163.

*Методичні рекомендації*

Під час опрацювання теми зверніть увагу на поняття диференціала першого та другого порядку та частинних похідних вищого порядку функції багатьох змінних, градієнта. Розгляньте приклади, що наводяться в рекомендованій літературі, та проаналізуйте їх. Зокрема, приклад 6 (с.153), приклад 8 (с.155) та приклади 3,4 (с. 162).



***Завдання для самостійного опрацювання****:*

1. Знайти диференціал другого порядку функції:



2. Знайти умовний екстремум функції двох змінних:

 при 

3. Знайти величину і напрямок градієнта:

 в точці 



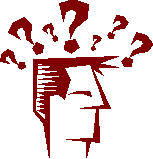
***Питання для самоперевірки:***

1. Повний диференціал функції багатьох змінних.
2. Як позначаються та знаходять похідні вищих порядків.
3. Означення градієнта. Що він визначає?
4. Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа.

Розділ 8

Тема 8.1:

Мета: повторення та узагальнення відомостей про невизначений інтеграл, властивості та основні формули інтегрування.



|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати****:*   * + означення первісної функції;   + означення невизначеного інтеграла;   + властивості невизначеного інтеграла та основні формули інтегрування. | ***Вміти****:*   * + знаходити невизначені інтеграли за допомогою формул інтегрування та властивостей інтеграла. |

***Завдання****:*



* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання згідно номера варіанта.

*План*

1. Поняття невизначеного інтеграла.
2. Властивості інтегрування.
3. Таблиця інтегралів.

*Рекомендована література:*



[1] § 104-107 с. 214-221.

[2] т.18 с. 125-128.

*Методичні рекомендації*

При опрацюванні матеріалу необхідно вивчити означення невизначеного інтеграла, основні властивості невизначеного інтеграла та формули інтегрування.

На окремому листочку виписати формули з метою їх використання на наступних заняттях (с. 228 І.Л. Зайцев "Елементи вищої математики").

Зверніть увагу на розв’язування вправ: приклад 1, 2, 3 (с. 218), приклад 13 і 14 (с. 229) [1].



***Завдання для самостійного опрацювання****:*

Знайти невизначені інтеграли:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***Варіант 1***  1. ;  2. ;  3. . | ***Варіант 2***  1. ;  2. ;  3. . | ***Варіант 3***  1. ;  2. ;  3. . |
| ***Варіант 4***  1. ;  2. ;  3. . | ***Варіант 5***  1. ;  2. ;  3. . | ***Варіант 6***  1. ;  2. ;  3. . |
| ***Варіант 7***  1. ;  2. ;  3. . | ***Варіант 8***  1. ;  2. ;  3. . | ***Варіант 9***  1. ;  2. ;  3. . |
| ***Варіант 10***  1. ;  2. ;  3. . | ***Варіант 11***  1. ;  2. ;  3. . | ***Варіант 12***  1. ;  2. ;  3. . |
| ***Варіант 13***  1. ;  2. ;  3. . | ***Варіант 14***  1. ;  2. ;  3. . | ***Варіант 15***  1.;  2. ;  3. . |
| ***Варіант 16***  1. ;  2. ;  3. . | ***Варіант 17***  1. ;  2. ;  3. . | ***Варіант 18***  1. ;  2. ;  3. . |
| ***Варіант 19***  1. ;  2. ;  3. . | ***Варіант 20***  1. ;  2. ;  3. . | ***Варіант 21***  1. ;  2. ;  3. . |
| ***Варіант 22***  1. ;  2. ;  3. . | ***Варіант 23***  1. ;  2. ;  3. . | ***Варіант 24***  1. ;  2. ;  3. . |
| ***Варіант 25***  1. ;  2. ;  3. . | ***Варіант 26***  1. ;  2. ;  3. . | ***Варіант 27***  1. ;  2. ;  3. . |
| ***Варіант 28***  1. ;  2. ;  3. . | ***Варіант 29***  1. ;  2. ;  3. . | ***Варіант 30***  1. ;  2. ;  3. . |

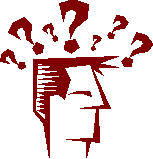


***Питання для самоперевірки:***

1. Означення невизначеного інтеграла.
2. Властивості невизначеного інтеграла.
3. Формули інтегрування.

Тема 8.2:

Мета: ознайомитись із суттю інтегрування тригонометричних функцій, з інтегралами різних видів та способами їх знаходження; набути навичок інтегрування.



|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати****:*   * + основні тригонометричні тотожності;   + суть інтегрування тригонометричних функцій. | ***Вміти****:*   * + інтегрувати тригонометричні функції. |

***Завдання****:*



* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання.

*План*

1. Суть знаходження інтегралів вигляду  .
2. Суть знаходження інтегралів вигляду , , 
3. Суть знаходження інтегралів вигляду , де R – раціональна функція двох змінних.

*Рекомендована література:*



[2] т.20 с. 133-134.

*Методичні рекомендації*

При опрацюванні матеріалу необхідно з’ясувати, які основні математичні прийоми застосовуються при інтегруванні тригонометричних функцій.

Зверніть увагу на розв’язані приклади 2,3,4,5 (с. 133-134). Проаналізуйте хід розв’язання та за аналогією спробуйте виконати завдання для самостійного опрацювання.



***Завдання для самостійного опрацювання****:*

Знайти інтеграли :

1. ; 2. .



***Питання для самоперевірки:***

1. Якою тригонометричною тотожністю користуються при знаходженні інтегралів вигляду: ?
2. Які тригонометричні формули використовують для обчислення інтегралів вигляду:, ,  ?
3. Яку підстановку застосовують для обчислення інтегралів вигляду: , де R – раціональна функція двох змінних?

Тема 8.3:

Мета: ознайомитись із суттю інтегрування ірраціональних функцій та основною підстановкою, за допомогою якої данні інтеграли обчислюються; набути навичок інтегрування.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати****:*   * + яка функція є ірраціональною ;   + суть інтегрування ірраціональних функцій. | ***Вміти****:*   * + розпізнавати ірраціональні функції та застосовувати підстановку для їх інтегрування. |

***Завдання****:*



* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання.

*План*

1. Поняття ірраціональної функції.
2. Суть обчислення інтегралів від ірраціональних функцій

*Рекомендована література:*



[2] т.20 с. 133-134.

*Методичні рекомендації*

При опрацюванні матеріалу необхідно з’ясувати, яка основна підстановка використовується при інтегруванні ірраціональних функцій.

Зверніть увагу на розв’язаний приклад 6 (с. 134). Проаналізуйте хід його розв’язання та за аналогією спробуйте виконати завдання для самостійного опрацювання.



***Завдання для самостійного опрацювання****:*

Знайти інтеграли :

1. ; 2. .

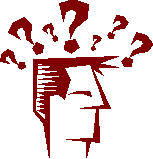


***Питання для самоперевірки:***

1. Яка функція називається ірраціональною?
2. Яку підстановку застосовують для обчислення інтегралів вигляду: , де R – раціональна функція двох змінних?

Тема 8.4:

Мета: повторення відомостей про визначений інтеграл, знайомство з поняттям визначеного інтегралу як границі інтегральної суми, формування вмінь обчислювати визначені інтеграли.



|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати****:*   * + означення визначеного інтеграла   як границі інтегральної суми;   * + формулу Ньютона-Лейбніца. | ***Вміти****:*   * + обчислювати визначені інтеграли, користуючись формулою Ньютона-Лейбніца. |

***Завдання****:*



* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання.

*План*

1. Поняття визначеного інтеграла як границі інтегральної суми.
2. Формула Ньютона-Лейбніца.

*Рекомендована література:*



[1] § 109-113 с. 230-241.

[2] т. 21 с. 137.

*Методичні рекомендації*

При опрацюванні матеріалу повторіть означення визначеного інтеграла та досконально розгляньте питання – визначений інтеграл як границя інтегральної суми, запам'ятайте формулу Ньютона-Лейбніца, необхідну для обчислення визначеного інтеграла.

Проаналізуйте приклади 1, 2, 3 (с. 231-232) [2].



***Завдання для самостійного опрацювання****:*

Знайти інтеграли :

1. ; 2. ; 3. ;

4. ; 5. ; 6. ;

7. ; 8. .

Примітка*:* *К*- номер студента за списком.



***Питання для самоперевірки:***

1. Означення визначеного інтеграла як границі інтегральної суми.
2. Формула Ньютона-Лейбніца.

Тема 8.5:

Мета: ознайомитись з практичним застосуванням визначеного інтеграла.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати****:*   * + формулу знаходження площі плоскої фігури;   + формулу знаходження об’єму тіла;   + формулу знаходження шляху, пройденого тілом, за допомогою визначеного інтегралу;   + інтеграл, що виражає роботу змінної сили.   + застосування визначеного інтеграла в економіці. | ***Вміти****:*   * + вміти розв’язувати математичні та фізичні задачі, що розв’язуються за допомогою визначеного інтеграла. |

***Завдання****:*



* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання.

*План*

1. Площа плоскої фігури.
2. Об’єм тіла.
3. Робота змінної сили.
4. Шлях, пройдений тілом.
5. Застосування інтеграла в економіці.

*Рекомендована література:*

[1] § 114-116 с. 241-251,



§ 118-120 с. 254-260.

[2] т. 22 с. 142-147.

[6] § 23 с. 135, § 25 с. 144.

*Методичні рекомендації*

При опрацюванні матеріалу вивчіть формули за якими можна розв'язувати фізичні та технічні задачі, це обчислення шляху пройденого тілом, відшукання роботи сили, роботи, яка виконується при підніманні вантажу.

Уважно проаналізуйте розв’язані задачі № 1 (с. 255) [1] на обчислення шляху пройденого тілом, №1,2 (с. 257) [1] на обчислення роботи сили.

Ознайомтесь також з використанням визначеного інтегралу в економіці. Розгляньте приклади 6,7,8,9 (с. 144-146) [2].



***Завдання для самостійного опрацювання****:*

***Задача 1.*** Знайти середнє значення витрат , виражених у гривнях, якщо обсяг продукції *х* змінюється від 0 до 5 одиниць.

***Задача 2.*** Обчислити площу, обмежену кривими , .

***Задача 3.*** Швидкість руху тіла *см/сек*. Визначити шлях його за третю секунду.



***Питання для самоперевірки:***

1. Назвіть задачі математичного та фізичного змісту, де застосовується визначений інтеграл.

2. Де застосовують визначений інтеграл в економіці?

Розділ 9

Тема 9:

Мета: ознайомитися з поняттям та способом розв’язання лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами; навчитись знаходити загальний та частинний розв’язок.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати****:*   * + загальний вигляд лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами;   + вигляд, який має загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами у випадках, коли корені характеристичного рівняння дійсні та різні або дійсні та рівні. | ***Вміти****:*   * + складати характеристичне рівняння лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами;   + знаходити загальний та частинний розв’язки. |

***Завдання****:*



* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання.

*План*

1. Поняття лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
2. Характеристичне рівняння. Корені характеристичного рівняння.
3. Загальний та частинний розв’язки лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

*Рекомендована література:*



[1] § 127 с. 284-288.

[2] т.27 с. 183-186.

[3] п.5.3. с. 98-100.

*Методичні рекомендації*

При опрацюванні матеріалу вивчіть формули за якими знаходять загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами у випадках, коли корені характеристичного рівняння дійсні і різні та дійсні і рівні між собою. Інші випадки розглядати не потрібно.

Розгляньте та проаналізуйте розв’язані приклади 1,2 (с. 287-288) [1] та приклади 1,2 (с. 99-100) [3].



***Завдання для самостійного опрацювання****:*

1. Знайти загальний розв’язок таких рівнянь:

А) ; Б) 

1. Знайти частинний розв’язок рівняння:

, якщо при   і 

***Питання для самоперевірки:***



1. Який вигляд має лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
2. Який вигляд має загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами у випадку, коли корені характеристичного рівняння дійсні та рівні між собою?
3. Який вигляд має загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами у випадку, коли корені характеристичного рівняння дійсні та різні?

Розділ 10

Тема 10:

Мета: узагальнити та систематизувати знання з комбінаторики; пригадати поняття ймовірності події та випадкової величини; ознайомитися з поняттями математичного сподівання та дисперсії випадкової величини; сформувати вміння та навички розв’язувати задачі з теорії ймовірності.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Знати****:*   * + означення розміщення, перестановки, сполучення та формули їх обчислення;   + поняття випадкової події та операції над ними;   + класичне означення ймовірності;   + формулу повної ймовірності;   + правило додавання та множення ймовірностей;   + закон розподілу випадкової величини;   + означення математичного сподівання та дисперсії випадкової величини. | ***Вміти****:*   * + розв’язувати задачі з комбінаторики;   + знаходити ймовірність випадкової події;   + знаходити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини. |

***Завдання****:*



* опрацювати рекомендовану літературу та зробити короткий конспект з питань плану;
* виконати самостійно практичне завдання.

*План*

1. Елементи комбінаторики. Розміщення, перестановки, сполучення.
2. Випадкові події та операції над ними. Класичне означення ймовірності події.
3. Теорема додавання. Теорема множення. Незалежність подій. Формула повної ймовірності.
4. Закон розподілу випадкової величини. Математичне сподівання. Дисперсія випадкової величини.

*Рекомендована література:*



[6] § 26-31 с. 158-222.

*Методичні рекомендації*

При опрацюванні матеріалу вивчіть основні формули та означення, що розглядаються.

Розгляньте та проаналізуйте розв’язані приклади з вказаних параграфів.



***Завдання для самостійного опрацювання****:*

1. Кидають три монети. Знайти ймовірність того, що тільки на одній монеті з’явиться «герб».

2. Слово – ваше прізвище – складено з карток, на кожній з яких написана одна літера. Картки перемішують та виймають по одній без повернення назад. Знайти ймовірність, що при їх викладанні можна буде прочитати ваше прізвище.

3. Випадкова величина Х розподілена за законом

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| 1  4 | 1  8 | 1  4 | 1  8 | 1  4 |

Знайдіть **M**X і **D**X.

***Питання для самоперевірки:***



1. Що називається розміщенням та за якою формулою воно обчислюється?
2. Що називається переміщенням та за якою формулою воно обчислюється?
3. Що називається сполученням та за якою формулою воно обчислюється?
4. Формула повної ймовірності.
5. Закон розподілу випадкової величини.
6. Означення математичного сподівання.
7. Означення дисперсії випадкової величини.
8. Зайцев І.Л. Елементи вищої математики для технікумів. – К: Вища школа, 1973. – 356 с.
9. Вища математика. Частина 1. / Лавренчук В.П., Готинчан Т.І., Дронь В.С., Кондур О.С. – 2-е вид., стереот. – Чернівці: Рута, 2002. – 191 с.
10. Казановський В.І., Мельник Н.М., Африканова А.Г. Вища математика. Конспект лекцій. – Немішаєве: ТМЦ, 2003. – 134с.
11. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов на базе средней школы: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 576 с.: ил.
12. Алгебра і початки аналізу. Частина 1. / за ред. Яковлєва Г.М. – К: Вища школа, 1979. – 312 с.
13. Алгебра і початки аналізу. Частина 2. / за ред. Яковлєва Г.М. – К: Вища школа, 1980. – 312 с.
14. Яковлєв Г.Н. Геометрія. – К: Вища школа, 1984. – 354с.
15. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу. – К: Освіта, 2000. – 378с.